УДК 622.647.2

Р.В. Кирия, к. т. н.,
Г.И. Ларионов, к. т. н.,
Д.Д. Брагинец, м. н. с.
(ИГТМ)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ РАЗГРУЗКИ УСРЕДНЯЮЩЕГО БУНКЕРА ДЛЯ ПОДДЕРЖАНИЯ ЗАЩИТНОГО СЛОЯ ГРУЗА

На основі теорії безперервних марківських процесів розроблено математичну модель функціонування усереднюючих бункерів конвеєрного транспорту вугільних шахт. Визначено мінімальну продуктивність розвантаження бункера в режимі підтримки в ньому захисного шару вантажу. Результати теоретичних досліджень порівнювалися з результатами імітаційного моделювання.

THE DETERMINATION OF OPTIMUM PRODUCTIVITY OF THE AVERAGING BUNKER UNLOADING FOR MAINTENANCE OF PROTECTIVE LOAD LAYER

On the basis of the theory of uninterrupted marcov processes the mathematical model of the functioning of averaging bunkers of mining conveyor transport is worked out. Minimum productivity of bunker unloading in the regime of maintenance in it the protective load layer is determined. The results of theoretical investigations were compared with the results of imitative modeling.

В работе подземного конвейерного транспорта угольных шахт важную роль играют усредняющие бункеры. Усредняющие бункеры обычно оборудуются в участковых выработках, особенно в местах перегрузки забойных грузопотоков на сборные конвейеры.

С целью предотвращения разрушения горнотранспортного оборудования вследствие падения крупных кусков груза в бункере необходимо поддерживать защитный слой груза. Для этого необходимо в зависимости от параметров поступающего грузопотока, вместимости бункера и объема защитного слоя груза определить необходимую производительность разгрузки.

В случае работы бункера в режиме поддержания защитного слоя разгружаемый из бункера грузопоток выключается, если количество груза в бункере достигает максимального значения $V_{\max}$ (м^3), и включается, если количество груза в бункере становится меньше допустимого минимального значения $V_{\min}$ (м^3). При этом загружаемый в бункер грузопоток не выключается, даже когда количество груза в бункере достигает допустимого максимального или минимального значения [1].

Результаты имитационного моделирования этого режима показали [1], что в случае, когда средняя производительность поступающего грузопотока m_Q больше либо равна производительности разгрузки Q_n, ($m_Q \ge Q_n$), объем груза в бункере неограниченно увеличивается, соответственно нет необходимости поддержания защитного слоя груза. Если же $m_Q < Q_n$, то среднее количество груза в бункере представляет конечное значение, которое зависит от параметров поступающего грузопотока и значений минимального и максимального объемов груза в бункере.

Следовательно, для поддержания защитного слоя груза в бункере необходимо чтобы производительность разгрузки бункера была больше средней производительности поступающего в него грузопотока, т.е. $Q_n > m_Q$.

В этом случае для определения зависимости среднего количества груза в бункере от параметров загружаемого и разгружаемого грузопотоков необходимо иметь математическую модель функционирования усредняющего бункера в режиме поддержания защитного слоя.

Целью статьи является разработка математической модели функционирования усредняющего бункера в режиме поддержания в нем защитного слоя груза $Q_n > m_Q$.

Задачей исследования является определение средней минимальной производительности разгружаемого из бункера грузопотока, работающего в режиме поддержания защитного слоя груза.

Для разработки математической модели функционирования усредняющего бункера предположим, что поступающий в бункер минутный грузопоток представляет собой нормальный случайный марковский процесс с математическим ожиданием m_Q т/мин, средним квадратическим отклонением σ_Q т/мин и корреляционной функцией, равной [2]

$$R_Q(t-\tau)=\sigma_Q^2 e^{-\alpha(t-\tau)},$$

где t, τ – начальный и конечный моменты времени соответственно, мин;

α – параметр корреляционной функции, 1/мин.

Разгружаемый из бункера грузопоток имеет постоянное значение Q_n т/мин, равное минутной производительности питателя или производительности свободного истечения сыпучего груза из бункера с регулируемой заслонкой.

Процесс функционирования бункера при поддержании защитного слоя, согласно [3], является двумерным нормальным марковским процессом, представленным системой уравнений:

$$\begin{cases} \gamma \dfrac{dV}{dt} = Q(t) - Q_n; \\ \dfrac{dQ}{dt} + \alpha Q(t) = \sigma_Q \sqrt{2\alpha}\, \zeta(t) + \alpha m_Q, \end{cases} \tag{1}$$

где $M[Q(t)] = m_Q$; $D[Q(t)] = \sigma_Q^2$.

Здесь $V(t)$ – количество груза в бункере в момент времени t, м^3; $Q(t)$ – минутный грузопоток, поступающий в бункер, т/мин; $\zeta(t)$ – белый шум, т.е. случайная функция с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной дельта-функции $\delta(t)$ [3]; γ – объемный вес материала т/м^3.

При этом, если разгрузочное устройство работает, то в уравнении (1)

$Q_n > 0$, если разгрузочное устройство не работает, то в уравнении (1) $Q_n = 0$.

Уравнения (1) должны удовлетворять начальным и граничным условиям:

- начальные условия

при $t = 0$ $\quad Q(0) = Q_0$; $V(0) = V_{\min}$, если $Q_n = 0$;

$$Q(0) = Q_0;\ V(0) = V_{\max},\ \text{если } Q_n \neq 0. \tag{2}$$

- граничные условия

при $V = V_{\max}$ $\quad Q_n = 0$;

при $V = V_{\min}$ $\quad Q_n > 0$. (3)

Кроме того, должны выполнятся условия

$$V_{\min} \leq V(t) \leq V_{\max}\ (0 \leq t < \infty),$$

где Q_0 – величина грузопотока, поступающего в бункер в начальный момент времени, т/мин.

Случайный процесс, описываемый системой уравнений (1), является непрерывным марковским процессом, функция распределения которого описывается уравнением Фокера-Планка-Колмогорова первого рода [3]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (x_2 - Q_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} - a(x_2 - m_Q)\frac{\partial f}{\partial x_2} + a\sigma_Q^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0, \tag{4}$$

где $f(t, x_1, x_2, \tau, y_1, y_2)$ – плотность вероятности двумерной условной функции распределения перехода марковского процесса из начального состояния $(x_1; x_2)$ в начальный момент времени t в состояние $(y_1; y_2)$ в момент времени τ $(\tau > t)$.

Здесь x_1, y_1 – значения случайной функции $V(t)$ в моменты времени t и τ, а x_2, y_2 – значения случайной функции $Q(t)$ в моменты времени t и τ.

При этом должны выполняться начальные и граничные условия:

- начальные условия

при $t = \tau$ $\quad f(t, x_1, x_2, \tau, y_1, y_2) = \delta(x_1 - y_1) \times \delta(x_2 - y_2)$;

- граничные условия

при $x_1 = V_{\min}$ $\quad f = 0$; если $Q_n = 0$;

$x_1 = V_{\max}$ $\quad f = 0$; если $Q_n > 0$;

при $x_2 \to \infty$ $\quad f = 0$ при любом $Q_n \geq 0$.

Кроме того, должны выполняться условия нормировки, т.е.

$$f(t, x_1, x_2, \tau, y_1, y_2) > 0;$$

$$\int_{V_{\min}}^{V_{\max}} \int_0^{\infty} f(t, x_1, x_2, \tau, y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2 = 1.$$

Для определения среднего значения времени заполнения бункера θ при неработающей разгрузке ($Q_n = 0$) и работающей разгрузке ($Q_n > 0$), следуя работам [3,4], проинтегрируем уравнение (4) по переменной y_1 от $V_{\min}$ до $V_{\max}$, по y_2 от 0 до ∞ и по времени t от 0 до ∞. В результате приходим к уравнению

Понтрягина [3,4].

$$\left(x_2 - Q_n\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - \alpha\left(x_2 - m_Q\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \alpha\sigma_Q^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x_2} = -1, \tag{5}$$

где $\theta = \varphi\left(x_1, x_2\right)$.

При этом выполняются начальные и граничные условия:

- начальные условия

при $t = 0$ $\quad x_1 = V_1$, если $Q_n = 0$;

$x_1 = V_2$, если $Q_n > 0$;

$x_2 = Q_0$ при любом $\quad Q_n \geq 0$. (6)

- граничные условия

при $x_1 = V_2 = V_{\max}$ $\quad \theta = 0$, $\quad$ если $Q_n = 0$;

$x_1 = V_1 = V_{\min}$, $\quad \theta = 0$, $\quad$ если $Q_n > 0$. (7)

Уравнение (5) в частных производных от двух переменных можно свести к уравнению Рикати. Однако уравнение Рикати в общем случае не имеет аналитического решения [5].

Однако исследования показали, что среднее квадратичное отклонение σ_Q грузопотока, поступающего из лавы в бункер, намного меньше средней минутной производительности m_Q, т.е. $\sigma_Q << m_Q$.

Следовательно, отношение

$$\varepsilon = \frac{\sigma_Q}{m_Q} \tag{8}$$

является малым параметром. Кроме того, для минутного грузопотока, поступающего в бункер, выполняется неравенство

$$\left|x_2 - m_Q\right| < k_1\sigma_Q, \tag{9}$$

где k_1 – некоторый безразмерный коэффициент, характеризующий степень относительного отклонения реального грузопотока, поступающего в бункер, от среднего значения.

Следовательно, коэффициент, стоящий перед вторым членом уравнения (5), является малой величиной, которая изменяется в пределах

$$-\alpha k_1\varepsilon m_Q < \alpha\left(x_2 - m_Q\right) < \alpha k_1\varepsilon m_Q. \tag{10}$$

Вместо одного уравнения (5), с учетом (10), рассмотрим два уравнения с неизвестными значениями θ_1 и θ_2, у которых коэффициенты при втором члене уравнения (5) принимают максимальное и минимальное значение соответственно:

$$\varepsilon^2\alpha m_Q^2\frac{\partial^2\theta_i}{\partial x_2} - (-1)^{i+1}\varepsilon\alpha k_1 m_Q\frac{\partial\theta_i}{\partial x_2} + \left(x_2 - Q_n\right)\frac{\partial\theta_i}{\partial x_1} = -1, \tag{11}$$

$(i = 1,2)$.

При этом выполняются начальные и граничные условия (6) и (7), где Q_0 в зависимости от i принимает значение

$$Q_{0i} = m_q + (-1)^{i+1} k_1 \sigma_Q \quad (i=1,2).$$

Тогда решение уравнения (5), в силу малости параметра ε, приближенно можно представить в виде

$$\theta_c \approx \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}. \tag{12}$$

Для решения уравнений (11) применим асимптотический метод аппроксимации Паде [6], т.е. представим решение уравнений (11) в виде отношения линейных полиномов

$$\theta_i = \frac{a_0 + a_1 \varepsilon}{1 + b_1 \varepsilon}. \tag{13}$$

При этом разложение дроби (13) в ряд Тейлора по малому параметру ε должно совпадать с разложением решения уравнений (11) в ряд Тейлора по малому параметру ε до второго порядка включительно.

В результате приближенные решения уравнений (11) примут вид

$$\theta_i = \frac{\gamma (V_2 - V_1)}{Q_{0i} - Q_n} A_i, \quad (i=1,2), \tag{14}$$

где

$$A_i = \frac{1 + (-1)^{i+1} \left[\alpha \left(1 - \frac{k_1}{2} \right) \frac{\gamma (V_2 - V_1)}{(Q_{0i} - Q_n)^2} - \frac{2k_1}{Q_{0i} - Q_n} \right] \sigma_Q}{1 + (-1)^{i+1} \left[\frac{\alpha \gamma (V_2 - V_1)}{(Q_{0i} - Q_n)^2} - \frac{2k_1}{Q_{0i} - Q_n} \right] \sigma_Q}.$$

Разобьем один цикл работы бункера в режиме поддержания защитного слоя груза на два периода. В первом периоде разгрузка бункера не работает ($Q_n = 0$), объем груза в бункере увеличивается от минимального значения $V_{\min}$ до максимального $V_{\max}$. Во втором периоде разгрузка бункера работает ($Q_n > 0$) и объем груза в бункере уменьшается от максимального значения $V_{\max}$ до минимального $V_{\min}$.

Среднее время первого периода работы бункера (время загрузки) равно $t_з$, вычисляется по формуле (12) при значении $Q_n = 0$. А среднее время второго периода (время разгрузки бункера) t_p вычисляется по формуле (12) при значении $Q_n > 0$.

Среднее время одного цикла работы бункера t_c определяется по формуле

$$t_c = t_з + t_p.$$

Средний объем груза в бункере в стационарном режиме поддержания защитного слоя груза, согласно предположению об эргодичности случайного процесса [7], определяется по формуле

$$V_c = \frac{1}{t_c}\int_0^{t_c} V(t)\,dt, \tag{15}$$

где

$$V(t) = \begin{cases} V_1 + m_Q t, & \text{при } 0 \le t < t_з; \\ V_2 - (Q_n - m_Q)(t - t_з), & \text{при } t_з \le t \le t. \end{cases}$$

В результате интегрирования выражение (15) примет вид

$$V_c = \frac{V_1 t_з + V_2 t_в}{t_c} + \frac{m_Q t_з^2 - (Q_n - m_Q) t_в^2}{t_c}. \tag{16}$$

В результате аппроксимации уравнения (16) по методу, изложенному в работе [8], было найдено значение V_c в виде инженерной формулы

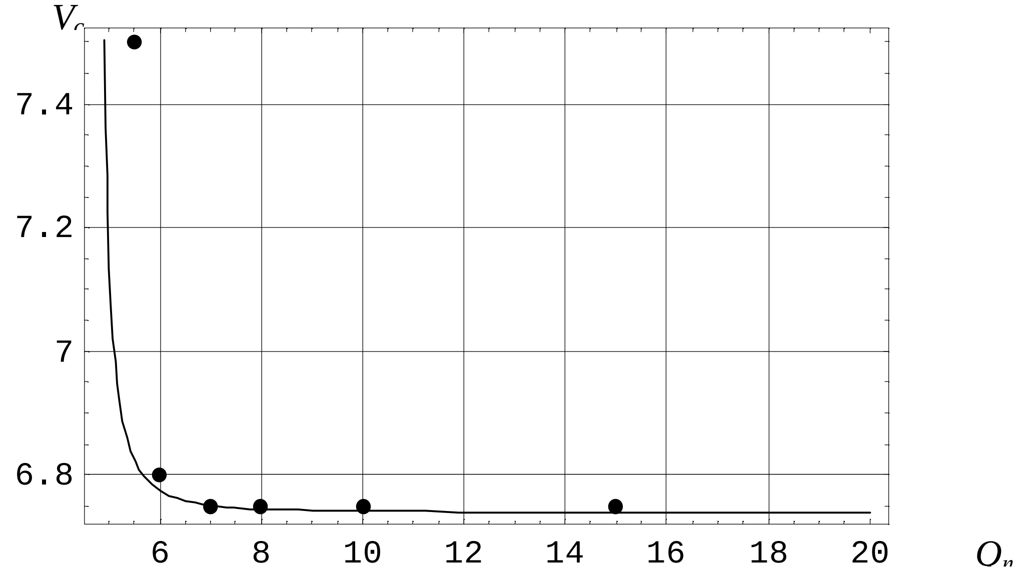
$$V_c = A\alpha_0 m_{Q0}\gamma_0\sigma_{Q0}\left(\Delta V_0 + \frac{2\Delta V}{\Delta V_0}\right)\left(\frac{V_{\min}}{V_{\min 0}} + \frac{V_{\min}}{8}\right)\left(Q_{n0} - \frac{Q_n}{7Q_{n0}}\right). \tag{17}$$

где $\Delta V = V_{\max} - V_{\min}$. Здесь индексом 0 обозначены начальные значения параметров.

Из формулы (17) следует, что средний объем груза в бункере в режиме поддержания защитного слоя существенно зависит от изменения максимального $V_{\max}$ и минимального $V_{\min}$ объемов груза в бункере, производительности разгружаемого грузопотока Q_n и мало зависит от изменения параметров поступающего грузопотока m_Q, σ_Q, α.

На рисунке 1 показан график зависимости среднего объема груза в бункере V_c в зависимости от производительности разгрузки Q_n, построенный согласно формуле (16). При этом исходные данные принимали значения: $V_{\max}$ = 9 м^3; $V_{\min}$ = 4,5 м^3; m_Q = 3,7 т/мин; σ_Q = 1,23 т/мин; α = 0,14 мин$^{-1}$; γ = 1 т/м^3, k_1=0,1

Из графика (см. рис. 1) видно, что при увеличении производительности разгрузки Q_n средний объем груза в бункере V_c сначала резко уменьшается, достигая минимального значения, а затем при дальнейшем увеличении Q_n средний объем V_c увеличивается и стремится к предельному значению, равному полусумме максимального и минимального объемов груза в бункере ($V_c \to 6{,}75$ при $Q_n \to \infty$).



- теория; ● - имитационное моделирование.

Рис. 1 – График зависимости среднего объема в бункере от производительности разгрузки.

Кроме того, на рис. 1 точками показаны результаты имитационного моделирования функционирования бункера в режиме поддержания защитного слоя, полученные для тех же исходных данных. Из графика видно, что теория отличается от результатов имитационного моделирования не более чем на 10 %.

Исследования показали, что минимальное значение среднего объема бункера $V_{c\ \min}$ мало отличается от полусуммы максимального и минимального объемов груза в бункере, т.е.

$$V_{c\ \min} \approx \frac{V_{\max} + V_{\min}}{2}. \tag{18}$$

В связи с этим за минимальную производительность разгрузки $Q_{n\ \min}$ бункера принимается производительность, при которой средний объем груза в бункере, работающем в режиме поддержания защитного слоя груза, равняется полусумме максимального и минимального объемов груза в бункере.

Подставляя значение $V_{c\ \min}$ из (18) в формулу (17), можно определить минимальное значение разгрузки $Q_{n\ \min}$. В нашем случае расчеты показали, что $Q_{n\ \min} \approx 7$ т/мин.

Выводы.

На основании теории непрерывных марковских процессов разработана математическая модель функционирования усредняющего бункера в режиме поддержания защитного слоя груза.

Получены аналитические зависимости среднего объема груза в бункере от параметров загружаемого и разгружаемого грузопотоков.

Определена минимальная производительность разгружаемого грузопотока, при которой средний объем бункера, работающего в режиме поддержания защитного слоя груза, минимален.

Полученные теоретические результаты отличались от результатов имитационного моделирования не более чем на 10%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирия Р.В. Имитационные модели функционирования усредняющих и аккумулирующих бункеров конвейерных линий угольных шахт / Р.В. Кирия, Д.Д. Брагинец, Т.Ф. Мищенко // Геотехническая механика: Межвед. сб. научн. тр. / ИГТМ НАНУ. - Днепропетровск, 2008. – Вып. 77. - С. 100-109.

2. Шахмейстер Л.Г. Подземные конвейерные установки / Л.Г. Шахмейстер, Г.И. Солод. - М.: Недра, 1976. - 432 с.

3. Свешников А.А. Прикладные методы случайных функций / А.А. Свешников. - М.: Наука, 1968. - 464 с.

4. Болотин В.В. Применение методов теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений / В.В. Болотин. – М.: Издательство литературы по строительству, 1971. – 255 с.

5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1971. - 576 с.

6. Бейкер Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Морис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.

7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. - М.: Высшая школа, 2000. - 480 с.

8. Ларіонов Г.І. Про визначення максимальних значень попереднього навантаження металополімерних анкерів / Г.І. Ларіонов // Геотехническая механика: Межвед. сб. научн. тр. / ИГТМ НАНУ. - Днепропетровск, 2010. – Вып. 85. - С. 180-185.